

CONTINUIDADE E NÚMEROS IRRACIONAIS (STETIGKEIT UND IRRATIONALE ZAHLEN)

Richard Dedekind
(1872)

Editado por
Augusto J. Franco de Oliveira
Professor Emérito (Univ. de Évora)
CFCUL

PREFÁCIO DO EDITOR¹

Este artigo, cuja ideia central foi trabalhada por Dedekind enquanto ensinava em Zurique em 1858, apresenta uma fundamentação aritmética rigorosa para a teoria dos números reais, e constitui uma das peças chave da chamada *arimetização* (ou *rigorização*) da análise que teve lugar durante as últimas décadas do século XIX, e um dos pilares fundacionais de muita da Análise Matemática e da Topologia modernas.

Outros matemáticos além de Dedekind tentaram, aproximadamente ao mesmo tempo, desenvolver uma teoria dos números reais, utilizando uma variedade de abordagens; estes esforços preencheram uma lacuna que fora deixada por um famoso artigo de Bolzano sobre o teorema dos valores intermédios, (publicado em 1817) — um resultado que ainda não era, na sua generalidade, conhecido dos matemáticos da época.

Assim, inspirado pela teoria das proporções de Eudócio (Livro V dos Elementos de Euclides), que constitui a resposta dos géometras gregos à descoberta dos incomensuráveis pelos pitagóricos, William Hamilton, na sua “Teoria das funções conjugadas” (1837), tinha já percorrido uma distância considerável na direcção da concepção de Dedekind, definindo os números irracionais como partições dos racionais em duas classes. Mas, em contraste com Dedekind, ele não prosseguiu então na investigação das propriedades das partições ou na prova dos teoremas básicos sobre os números reais. É sabido que a sua definição de número irracional deve muito ao Livro V dos Elementos de Euclides (correspondência de Dedekind com Rudolf Lipschitz e Heinrich Weber). Também Weierstrass desenvolveu uma teoria aritmética dos números reais, que começou a apresentar a partir de 1859, nas suas lições em Berlim; mas os seus resultados só foram impressos alguns anos mais tarde (Kossak 1872). As teorias de Eduard Heine (1872) e do aluno de Weierstrass, Georg Cantor (1872), despertaram a atenção de Dedekind pouco antes da publicação do seu próprio artigo.

A definição de Dedekind dos números irracionais (como cortes ou pares de secções contíguas de números racionais) foi adoptada por muitos matemáticos da época como,

¹[Esta é uma tradução revista e editada da tradução publicada no *Bol. da Soc. Port. de Matemática* 41 (Outubro de 1999), 97-119, com o objectivo expresso de disponibilização *online* neste local. Para a primeira tradução contribuíram Rui Feiteira, Paula Gomes e A.J. Franco de Oliveira, que também fez a revisão científica e editorial. Para as traduções em Português foram utilizadas as versões publicadas no livrinho DEDEKIND [3] e na antologia de EWALD [7], pp. 765-779. DUGAC [4] é uma fonte importante de factos históricos e biográficos acerca de Dedekind. As notas de rodapé que não são do Autor, como esta, estão inseridas entre parênteses rectos.]

por exemplo, Dini (1878), Pasch (1882), Jordan (1893), Baire *et alii* (1905), e mais tarde pelo influente E. Landau (1930), W. Rudin (1953) e muitos outros até aos nossos dias, como S. Feferman (1989) e A.M. Gleason (1991). Entre nós foi adoptada, por exemplo, por J. Vicente Gonçalves (*Curso de Álgebra Superior*, 1933) e por Bento de Jesus Caraça (*Lições de Álgebra e Análise*, 1935). Pessoalmente também prefiro a construção de Dedekind, mais simples e “geométrica” do que a de Cantor (classes de equivalência de sucessões de Cauchy de números racionais). São inesquecíveis os momentos criativos em que, numa qualquer aula (por exemplo, de um curso de fundamentos, ou de teoria dos conjuntos, ou de filosofia da matemática), chegamos ao corte (A_1, A_2) definido na pág. 8 e fazemos a pergunta: o que será (poderá ser) então $\sqrt{2}$? Após alguns longos instantes de angustiante expectativa e ansiedade, respondemos num passe de magia (um pequeno passo além do de Dedekind) perante a estupefacção geral: defina-se $\sqrt{2} = (A_1, A_2)$! Mas não há bela sem senão e, no caso presente, o amargo de boca faz-se sentir quando tentamos estabelecer as propriedades algébricas básicas da multiplicação, coisa que a maioria dos autores evita fazer ou faz apenas timidamente. Mas veja-se [16].

Ao contrário do que seria talvez de esperar, o leitor actual de *Continuidade e Números Irracionais* não precisa fazer esforço algum para se adaptar às notações e/ou terminologia do autor, descontando apenas o facto de os racionais serem designados por R e os reais por \mathfrak{R} em vez dos hodiernos \mathbb{Q} e \mathbb{R} , respectivamente. Decidimos, por isso, deixar tudo como estava a este respeito.

Setembro de 2009.

Augusto J. Franco de Oliveira

PREFÁCIO DO AUTOR

As considerações que formam o assunto deste panfleto datam do Outono de 1858. Eu era então professor na Escola Politécnica de Zurique, e encontrei-me pela primeira vez obrigado a leccionar sobre os elementos do cálculo diferencial; senti-me mais fortemente do que nunca confrontado com a falta de uma verdadeira fundamentação científica para a aritmética. Discutindo o conceito da aproximação de uma magnitude variável a um valor limite fixo — em particular, demonstrando o teorema que diz que cada magnitude que cresce continuamente, mas não para além de todos os limites, deve certamente aproximar-se de um valor limite — refugiei-me na prova geométrica. Ainda agora considero tal invocação da intuição geométrica [*Anschauung*] numa primeira apresentação do cálculo diferencial como muito útil de um ponto de vista pedagógico, e de facto é indispensável, se não se quer perder demasiado tempo. Mas ninguém negara que esta forma de introdução ao cálculo diferencial não possa pretender-se científica. Este sentido de insatisfação era tão intenso que eu decidi meditar na questão até poder encontrar uma fundamentação [*Begründung*] puramente aritmética e perfeitamente rigorosa para os princípios da análise infinitesimal. Afirma-se frequentemente que o cálculo diferencial lida com quantidades contínuas, ainda que uma explicação desta continuidade nunca tenha sido dada; até as exposições mais rigorosas do cálculo diferencial não baseiam as suas demonstrações na continuidade, mas antes apelam mais ou menos conscienciosamente a representações geométricas ou a representações sugeridas pela geometria, ou dependem de teoremas que nunca são estabelecidos numa forma puramente aritmética. Entre estes está, por exemplo, o teorema mencionado acima, e uma investigação mais cuidadosa convenceu-me que este

teorema, ou qualquer outro equivalente a ele, pode ser considerado como uma fundamentação mais ou menos adequada da análise infinitesimal. Ficou apenas por descobrir a sua verdadeira origem nos elementos da aritmética e, assim, assegurar uma definição real da essência da continuidade. Consegui-o em 24 de Novembro de 1858, e uns dias depois comuniquei os resultados das minhas reflexões ao meu querido amigo Durège, o que levou a uma longa e acesa discussão. Mais tarde expliquei estas ideias de uma base científica da aritmética a alguns dos meus alunos, e aqui em Bunswick li um artigo sobre o assunto perante o clube científico de professores, mas não consegui decidir-me a publicá-lo, porque, em primeiro lugar, a apresentação não é de modo algum fácil, e, segundo, a própria teoria não é muito fértil. Apesar disso já estava meio determinado a seleccionar este tema como assunto para esta ocasião, quando há uns dias atrás, a 14 de Março, por gentileza do autor, o artigo “Die Elemente der Funktionenlehre” de E. Heine (*Crell's Journal*, Vol. 74) chegou às minhas mãos e me ajudou a confirmar a minha decisão. Concordo plenamente com a essência desse ensaio, e mal poderia fazer o contrário. Mas direi francamente que a minha própria apresentação me parece ter uma forma mais simples e esclarece melhor o ponto essencial. Enquanto escrevia este prefácio (20 de Março de 1872), recebi o interessante artigo “Über die Ausdehnung eines Stazes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen”, por G. Cantor (*Math. Annalen*, Vol. 5), pelo qual são devidos ao engenhoso autor os meus calorosos agradecimentos. Após uma leitura rápida, parece-me que o axioma dado na secção II daquele artigo (excepto pela forma de apresentação) está de acordo com o que designei no §3 como a essência da continuidade. Mas na minha forma de conceber os números reais, eles estão completos em si próprios; sou, portanto, incapaz de ver a utilidade de distinguir números reais de um tipo ainda mais elevado, mesmo se isso for feito apenas conceptualmente.

§1.

PROPRIEDADES DOS NÚMEROS RACIONAIS

O desenvolvimento da aritmética dos números racionais é aqui pressuposto, mas ainda assim penso que vale a pena chamar a atenção para certos aspectos importantes, sem discussão, para iluminar desde logo o ponto de vista assumido no que se segue. Considero o todo da aritmética como uma consequência necessária ou, pelo menos, natural, do mais simples acto aritmético, o de contar, e contar não é mais que a criação sucessiva da progressão infinita de inteiros positivos na qual cada elemento é definido pelo anterior; o acto mais simples é passar de um elemento já criado para o seu sucessor que está para ser criado. A cadeia destes números já forma por si mesma um instrumento muito útil para a mente humana; ela apresenta uma inexaurível riqueza de propriedades notáveis que se obtêm introduzindo as quatro operações fundamentais da aritmética. A adição é o resultado de juntar num só, um número arbitrário de repetições do acto simples; a multiplicação resulta de uma forma semelhante. Enquanto estas duas operações podem sempre ser feitas, as operações inversas, subtracção e divisão, são admissíveis apenas com restrições. Qualquer que tenha sido a ocasião imediata, quaisquer que tenham sido as comparações ou analogias com experiência, ou intuição que aí possam ter conduzido, é certamente verdade que precisamente esta limitação em fazer as operações indirectas foi em cada caso um motivo real para um novo acto criativo; assim, os números negativos e fraccionários foram criados pela mente humana, e no conjunto de todos os números racionais obteve-se um instrumento de grande perfeição. Este conjunto,

que denotarei por R , possui, antes de mais, uma completude e integridade que designei noutra local² como característica de um *corpo de números* [*Zahlkörper*] e que consiste no facto de as quatro operações fundamentais serem sempre executáveis com quaisquer dois elementos em R , isto é, o resultado é sempre um elemento de R , exceptuando o caso da divisão pelo número zero.

Todavia, para o nosso objectivo imediato, outra propriedade do conjunto R é ainda mais importante; pode ser expressa dizendo que o conjunto R forma um domínio totalmente ordenado [*Wohlgeordnetes*]³ de uma dimensão que se estende para o infinito em dois sentidos opostos. O que isto significa está suficientemente indicado pelo uso que faço de expressões que têm a sua origem em ideias geométricas; mas exactamente por esta razão, será necessário clarificar as propriedades puramente aritméticas correspondentes, para evitar igualmente a aparência de que a aritmética necessita de tais ideias alheias.

Para dizer que os símbolos a e b representam um e o mesmo número racional pomos $a = b$ assim como $b = a$. Dois números a, b são diferentes apenas no caso da diferença $a - b$ ter ou um valor positivo ou negativo. No primeiro caso, a diz-se *maior* do que b , e b *menor* do que a ; isto é também indicado pelos símbolos $a > b$ ou $b < a$.⁴ Analogamente, se $b - a$ tem valor positivo então tem-se $b > a$ ou $a < b$. As propriedades seguintes são válidas para estas duas maneiras em que dois números podem diferir:

I. Se $a > b$ e $b > c$ então $a > c$. Sempre que a, c forem números diferentes (ou desiguais) e b maior do que um e menor do que o outro, não devemos ser inibidos pelo eco das ideias geométricas, mas devemos dizer sem demora: b está situado entre os dois números a, c .

II. Se a, c são dois números diferentes, há infinitos números diferentes b entre a, c .

III. Se a é um número bem definido então todos os números do conjunto R dividem-se em duas classes, A_1, A_2 , cada uma das quais contendo um número infinito de elementos; a primeira classe A_1 compreende todos os números a_1 que são $< a$, a segunda classe A_2 compreende todos os números a_2 que são $> a$; o próprio número a pode ser atribuído como se queira à primeira ou à segunda classe, e é então respectivamente o maior número da primeira classe ou o mais pequeno da segunda. Em ambos os casos, a decomposição do conjunto R nas duas classes A_1, A_2 é tal que qualquer número da primeira classe A_1 é menor do que qualquer número da segunda classe A_2 .

§2.

COMPARAÇÃO DOS NÚMEROS RACIONAIS COM OS PONTOS DE UMA LINHA RECTA

Estas propriedades dos números racionais relembram as relações de posição correspondentes entre os pontos de uma linha recta L . Se os dois sentidos opostos nela existentes forem distinguidos por “direita” e “esquerda”, e p, q forem dois pontos diferentes então ou p está à direita de q , e q à esquerda de p , ou contrariamente q está à

²*Vorlesungen über Zahlentheorie*, por P.G. Lejeune Dirichlet, segunda edição, §159. [Recorde-se que Dedekind editou as *Obras Completas* de Dirichlet. Não devemos perder de vista que a terminologia da época também sofreu alguma evolução.]

³[O termo original seria traduzido literalmente por “bem-ordenado”, termo este que modernamente tem um significado técnico diferente do atribuído por Dedekind.]

⁴Portanto, no que se segue, quero dizer sempre os chamados maior e menor “algébricos”, a menos que a palavra “absoluto” seja acrescentada.

direita de p , e p à esquerda de q . Um terceiro caso é impossível, se p, q são realmente pontos diferentes. Para esta diferença na posição são válidas as leis seguintes:

I. Se p está à direita de q , e q à direita de r , então p está à direita de r . Dizemos que q está situado entre os pontos p e r .

II. Se p, r são dois pontos diferentes, então existem sempre infinitos pontos q que estão entre p e r .

III. Se p é um ponto dado em L então todos os pontos de L se dividem em duas classes, P_1, P_2 , cada uma das quais contendo um número infinito de elementos; a primeira classe P_1 contém todos os pontos p_1 , que estão à esquerda de p , e a segunda classe P_2 contém todos os pontos p_2 que estão à direita de p ; o próprio ponto p pode ser associado como se queira à primeira ou à segunda classe. Em qualquer dos casos a divisão da linha recta L em duas classes ou porções P_1, P_2 é tal que qualquer ponto da primeira classe P_1 está à esquerda de qualquer ponto da segunda classe P_2 .

Como é bem sabido, esta analogia entre os números racionais e os pontos de uma linha recta torna-se uma verdadeira correspondência quando escolhemos na linha recta uma origem bem determinada, ou um ponto zero o , e uma determinada unidade de medida para a medição dos segmentos. Com a ajuda desta última, é possível, para cada número racional a , construir o comprimento correspondente; e se pusermos esse comprimento na linha recta à direita ou à esquerda de o , conforme a seja positivo ou negativo, obtemos um ponto bem determinado p , que pode ser visto como o ponto correspondente ao número a ; o ponto o corresponde ao número racional zero. Assim, para cada número racional a , isto é, a cada elemento de R , corresponde na recta um e um só ponto p , isto é, um elemento em L . Se os dois pontos p, q correspondem a dois números a, b respectivamente, e se $a > b$ então p está à direita de q . As propriedades I, II, III da secção anterior correspondem exactamente às propriedades I, II, III desta secção.

§3

CONTINUIDADE DA LINHA RECTA

É da maior importância, todavia, que na linha recta L haja uma infinidade de pontos aos quais não corresponde nenhum número racional. Se o ponto p corresponde ao número racional a então, como é sabido, o comprimento op é comensurável com a unidade de medida usada na construção, isto é, existe um terceiro comprimento, a chamada medida comum, do qual estes dois comprimentos são múltiplos inteiros. Mas os Gregos antigos já sabiam e já tinham demonstrado que há comprimentos incomensuráveis com uma unidade de medida dada, como, por exemplo, a diagonal do quadrado cujo lado é a unidade de medida. Se marcarmos tal comprimento a partir do ponto o na linha, obtemos um ponto que não corresponde a nenhum número racional. Uma vez que, além disso, pode ser facilmente mostrado que há infinitos comprimentos que são incomensuráveis com a unidade de medida, podemos afirmar: A linha recta L é infinitamente mais rica em pontos individuais do que o domínio R dos números racionais em números individuais.

Se tentarmos agora, como é nosso desejo, acompanhar aritmeticamente todos os fenómenos na linha recta, os números racionais são insuficientes e torna-se inevitável e necessário que o instrumento R , construído pela criação dos números racionais, seja essencialmente refinado [*verfeinern*] pela criação de novos números de tal maneira que o

domínio dos números adquira a mesma completude, ou como poderemos já dizer, a mesma *continuidade* que a linha recta.

As considerações anteriores são tão familiares e bem conhecidas que muitos considerarão a sua repetição como supérflua. Ainda assim, considereei esta recapitulação como necessária para preparar devidamente para a questão principal. A forma pela qual os números irracionais são usualmente introduzidos baseia-se directamente na concepção de magnitudes extensas — que ainda não foram definidas cuidadosamente — e explica o número como o resultado de medir tal magnitude em comparação com outra do mesmo tipo.⁵ Em vez disto, quero que a aritmética se desenvolva a partir de si mesma.

Pode-se conceder que de uma forma geral tais comparações com noções não aritméticas forneceram a oportunidade imediata para a extensão do conceito de número (embora este não tenha sido por certo o caso na introdução dos números complexos); mas isto não é certamente razão para introduzir estas noções alheias na própria aritmética, a ciência dos números. Tal como os números racionais negativos e fraccionários são formados por uma criação livre, e tal como as propriedades de operar com estes números podem e devem ser reduzidas às propriedades de operar com inteiros positivos, devemos esforçar-nos por dar uma definição completa dos números irracionais utilizando somente os números racionais. A única questão que permanece é como fazê-lo.

A comparação acima do conjunto R dos números racionais com uma linha recta levou à identificação de falhas, e de uma certa incompletude ou descontinuidade no primeiro; mas para a linha recta imputamos ausência de falhas, completude, continuidade. Em que consiste então esta continuidade? Tudo deve depender da resposta a esta pergunta, e somente através dela obtemos uma base científica para a investigação de *todos* os domínios contínuos. É óbvio que nada se ganha em apenas comentar vagamente as conexões ininterruptas nas partes mais pequenas; o problema é indicar uma característica precisa da continuidade que possa servir como base para deduções válidas. Pensei sobre isto em vão durante muito tempo, mas finalmente encontrei o que procurava. Esta descoberta irá, talvez, ser julgada de forma diferente por diferentes pessoas; mas acredito que a maioria estime o seu conteúdo bastante trivial. Consiste no seguinte. Na secção precedente chamou-se a atenção para o facto de que qualquer ponto p da linha recta produz uma separação da mesma em duas porções [*Stucke*] tais que qualquer ponto de uma porção está à esquerda de qualquer ponto da outra. Encontro a essência da continuidade na propriedade recíproca, isto é, no princípio seguinte:

“Se todos os pontos da linha recta se dividem em duas classes tais que qualquer ponto da primeira classe está à esquerda de qualquer ponto da segunda classe então existe um e um só ponto que produz esta divisão de todos os pontos em duas classes, dividindo a linha recta em duas porções.”

Como já disse, penso não errar ao assumir que toda a gente reconhecerá imediatamente a verdade desta afirmação; a maioria dos meus leitores ficará muito desapontada ao saber que é através deste simples comentário que será revelado o segredo da continuidade. A isto posso responder que fico contente se toda a gente achar o princípio anterior tão óbvio e tão de acordo com as suas próprias ideias de linha recta;

⁵A vantagem aparente da generalidade desta definição de número desaparece tão rapidamente quanto consideremos os números complexos. Na minha opinião, por outro lado, a noção da razão entre dois números do mesmo tipo só pode ser claramente desenvolvida depois da introdução dos números irracionais.

por mim, sou incapaz de produzir alguma prova da sua correcção, nem ninguém pode. A assunção desta propriedade da recta não é mais do que um axioma pelo qual atribuímos à recta a sua continuidade, pelo qual pensamos a continuidade na linha recta. Se o espaço tem alguma existência real, *não* é de todo necessário que seja contínuo; muitas das suas propriedades manter-se-iam mesmo que fosse descontínuo. E se soubéssemos com certeza que o espaço era descontínuo, não haveria nada que nos impedisse, no caso de o desejarmos, de preencher as suas falhas em pensamento e assim torná-lo contínuo; este preenchimento consistiria na criação de novos pontos individuais e teria de ser feito de acordo com o princípio anterior.

§4. CRIAÇÃO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS

A partir dos últimos comentários é suficientemente claro como o domínio descontínuo R dos números racionais deve ser completado de maneira a formar um domínio contínuo. No §1 mostrou-se (III) que qualquer número racional a separa o conjunto R em duas classes tais que qualquer número a_1 da primeira classe A_1 é mais pequeno que cada número a_2 da segunda classe A_2 ; o número a é o maior número da classe A_1 ou o número mais pequeno da classe A_2 . Se for agora dada alguma separação do conjunto R em duas classes A_1, A_2 que possua apenas *esta* propriedade característica de que qualquer número a_1 em A_1 é menor do que qualquer número a_2 em A_2 , então por brevidade chamaremos a uma tal separação um *corte* [*Schnitt*] e designá-la-emos por (A_1, A_2) . Podemos então dizer que cada número racional a produz um corte ou, estritamente falando, dois cortes, que, contudo, não devemos ver como essencialmente diferentes; *além disso* este corte possui a propriedade de que ou existe um número maior entre os números da primeira classe, ou existe um número mais pequeno entre os números da segunda classe. E reciprocamente, se um corte possui esta propriedade então é produzido por este maior ou menor número racional.

Mas é fácil mostrar que existem infinitos cortes não produzidos por números racionais. O exemplo seguinte é o mais óbvio.

Seja D um inteiro positivo que não seja o quadrado de um inteiro. Então existe um inteiro positivo λ tal que

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2.$$

Se atribuirmos à segunda classe A_2 qualquer número racional positivo a_2 cujo quadrado seja $> D$, e à primeira classe A_1 todos os outros números racionais a_1 , esta separação forma um corte (A_1, A_2) , isto é, qualquer número a_1 é menor do que qualquer número a_2 . Pois se $a_1 = 0$ ou é negativo, então a_1 é menor do que qualquer número a_2 , porque, por definição, este último é positivo; se a_1 é positivo então o seu quadrado é $\leq D$, e portanto a_1 é menor do que qualquer número positivo a_2 cujo quadrado é $> D$.

Mas este corte não é produzido por nenhum número racional. Para demonstrar isto, deve-se primeiro mostrar que não existe nenhum número racional cujo quadrado $= D$. Embora isto seja conhecido dos primeiros elementos da teoria dos números, a demonstração indirecta que se segue pode, apesar de tudo, não ser desapropriada. Se existe um número racional cujo quadrado $= D$, então existem dois inteiros positivos t, u que satisfazem a equação

$$t^2 - Du^2 = 0,$$

e podemos assumir que u é o *menor* inteiro positivo que possui a propriedade de que o seu quadrado, multiplicado por D , pode ser convertido no quadrado de um inteiro t . Como evidentemente

$$\lambda u < t < (\lambda + 1)u,$$

o número $u' = t - \lambda u$ é um inteiro positivo certamente *menor* do que u . Se além disso pusermos

$$t' = Du - \lambda t,$$

t' é também um inteiro positivo, e obtemos

$$t'^2 - Du'^2 = (\lambda^2 - D)(t^2 - Du^2) = 0,$$

o que contraria a hipótese sobre u .

Portanto, o quadrado de qualquer número racional x ou é $< D$ ou $> D$. Daqui resulta facilmente que não há na classe A_1 um máximo, nem na classe A_2 um número mínimo. Pois, se pusermos

$$y = \frac{x(x^2 + 3D)}{3x^2 + D},$$

temos

$$y - x = \frac{2x(D - x^2)}{3x^2 + D}$$

e

$$y^2 - D = \frac{(x^2 - D)^3}{(3x^2 + D)^2}.$$

Se aqui admitirmos x como um número positivo da classe A_1 , então $x^2 < D$, e portanto $y > x$ e $y^2 < D$. Por isso também y pertence à classe A_1 . Mas se admitirmos x como um número da classe A_2 , então $x^2 > D$, e portanto $y < x$, $y > 0$ e $y^2 > D$. Por isso também aqui y pertence à classe A_2 . Por conseguinte, este corte não é produzido por nenhum número racional.

Esta incompletude ou descontinuidade do domínio R dos números racionais consiste precisamente nesta propriedade de que nem todos os cortes são produzidos por números racionais.

Assim, sempre que temos um corte (A_1, A_2) produzido por nenhum número racional, criamos um novo número, um número *irrational* α , que consideramos como completamente definido por este corte (A_1, A_2) ; diremos que o número α corresponde a este corte, ou que produz este corte. Por isso, de agora em diante, a cada corte bem definido corresponde um número racional ou irrational bem definido, e consideramos dois números como *diferentes* ou *desiguais* se e só se eles correspondem a cortes essencialmente diferentes.

De forma a obter uma base para o arranjo ordenado de todos os números *reais*, isto é, de todos os números racionais e irracionais, temos de investigar a relação entre dois

cortes quaisquer (A_1, A_2) e (B_1, B_2) produzidos por dois números α e β quaisquer. Obviamente o corte (A_1, A_2) é completamente dado quando uma das duas classes, por exemplo, a primeira A_1 é conhecida, porque a segunda A_2 consiste de todos os números racionais que não pertencem a A_1 , e a propriedade característica da primeira classe baseia-se no seguinte: se um número a_1 , está contido nela, então ela contém todos os números menores do que a_1 . Se agora compararmos tais primeiras classes A_1, B_1 uma com a outra, pode acontecer:

1. Que as classes são perfeitamente idênticas, isto é, todo o número contido em A_1 também está em B_1 , e todo o número em B_1 , está em A_1 . Neste caso A_2 é necessariamente igual a B_2 , e os dois cortes são perfeitamente idênticos, o que iremos denotar em símbolos por $\alpha = \beta$ ou $\beta = \alpha$.

Mas se duas classes A_1, B_1 não são idênticas então existe numa, por exemplo, em A_1 , um número $a'_1 = b'_2$ que não está na outra B_1 , e, conseqüentemente, está em B_2 ; portanto todos os números b_1 contidos em B_1 são certamente menores do que este número $a'_1 = b'_2$, e então todos os números b_1 estão em A_1 .

2. Se agora este número a'_1 é o único em A_1 que não está em B_1 , então todo o número a_1 em A_1 também está em B_1 , e é conseqüentemente $< a'_1$, isto é, a'_1 é o maior de todos os números a_1 ; portanto, o corte (A_1, A_2) é produzido pelo número $\beta = a'_1 = b'_2$. Quanto ao outro corte (B_1, B_2) , já sabemos que todos os números b_1 em B_1 também estão em A_1 e são menores que o número $a'_1 = b'_2$ que está em B_2 ; todos os outros números b_2 em B_2 têm que ser maiores do que b'_2 , pois de outra maneira seriam menores do que a'_1 e, por isso, contidos em A_1 e portanto em B_1 ; assim b'_2 é o menor de todos os números em B_2 , e conseqüentemente o corte (B_1, B_2) é produzido pelo mesmo número racional $\beta = a'_1 = b'_2 = \alpha$. Os dois cortes diferem então, apenas, de maneira não essencial.

3. Se, todavia, existirem em A_1 pelo menos, dois números diferentes $a'_1 = b'_2$ e $a''_1 = b''_2$, que não estão em B_1 , então existe uma infinidade deles; pois a infinidade de números que está entre a'_1 e a''_1 está obviamente contida em A_1 (§1, II) mas não em B_1 . Neste caso, dizemos que os números α e β correspondentes a estes dois cortes essencialmente diferentes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) são *diferentes*, e mais que isso, que α é *maior* do que β e que β é *menor* do que α , o que se exprime através dos símbolos $\alpha > \beta$ ou $\beta < \alpha$. Observe-se que esta definição coincide completamente com a outra dada mais acima quando α, β são racionais.

Os restantes casos possíveis são:

4. Se existe em B_1 , um e um só número $b'_1 = a'_2$ que não está em A_1 , então os dois cortes (A_1, A_2) e (B_1, B_2) não são essencialmente diferentes e são produzidos por um mesmo número racional $\alpha = a'_2 = b'_1 = \beta$.

5. Mas se existirem em B_1 , pelo menos, dois números que não pertencem a A_1 , então $\beta > \alpha, \alpha < \beta$.

Com isto esgotam-se os casos possíveis, concluindo-se que de dois números diferentes um é necessariamente o maior, e o outro é o menor, logo existem duas possibilidades. Uma terceira é impossível. Isto estava implícito na escolha dos termos *comparativos* (maior, menor) para designar a relação entre α, β ; mas esta escolha só agora foi justificada. Neste tipo de investigações é preciso ter muito cuidado para que, apesar da melhor das intenções de honestidade, não deixarmos, através de uma escolha precipitada de expressões emprestadas de outras noções já desenvolvidas, permitir-nos fazer transferências inadmissíveis de um domínio para outro.

Se agora considerarmos novamente o caso $\alpha > \beta$, é óbvio que o número mais pequeno β , se racional, pertence certamente à classe A_1 ; pois como existe em A_1 um número $a'_1 = b'_2$ que pertence à classe B_2 , segue-se que o número β , quer seja o maior número em B_1 ou o menor em B_2 é certamente $\leq a'_1$ e, portanto, está contido em A_1 . Da mesma forma tem-se de $\alpha > \beta$ que o maior número, α , se racional, pertence certamente à classe B_2 , pois $\alpha \geq a'_1$. Combinando estas duas observações, obtemos o seguinte resultado: se um corte (A_1, A_2) é produzido pelo número α então qualquer racional pertence à classe A_1 ou à classe A_2 , conforme é menor do que, ou maior do que α ; se o número α é ele próprio racional, pode pertencer a uma ou outra das classes.

Do que precede obtemos finalmente o seguinte: Se $\alpha > \beta$, isto é, se existem infinitos números em A_1 que não pertencem a B_1 , então existem infinitos números que são ao mesmo tempo diferentes de α e de β ; um qualquer tal número racional c é $< \alpha$, pois não está em A_1 ; é também $> \beta$, porque não está em B_2 .

§5.

CONTINUIDADE DO DOMÍNIO DOS NÚMEROS REAIS

Em consequência das distinções formuladas, o conjunto de todos os números reais forma um domínio totalmente ordenado de uma dimensão; isto quer dizer apenas que as seguintes propriedades são satisfeitas:

I. Se $\alpha > \beta$ e $\beta > \gamma$ então $\alpha > \gamma$. Assim, diremos que o número β está situado entre α e γ .

II. Se α, γ são dois números distintos, então existe uma infinidade de números diferentes β situados entre α, γ .

III. Se α é um número bem definido, então todos os números do conjunto \mathfrak{R} dividem-se em duas classes \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_2 em que cada uma contém uma infinidade de elementos; a primeira classe \mathfrak{A}_1 compreende todos os números a_1 menores do que α , a segunda classe \mathfrak{A}_2 compreende todos os números a_2 que são maiores do que α ; o número α pode ser arbitrariamente atribuído à primeira ou à segunda classe e será, respectivamente, o maior número da primeira classe ou menor número da segunda classe. Em qualquer dos casos, a separação do conjunto \mathfrak{R} em duas classes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ é tal que qualquer número da primeira classe \mathfrak{A}_1 é mais pequeno do que qualquer número da segunda classe \mathfrak{A}_2 , e dizemos que esta separação foi produzida pelo número α .

Para maior brevidade e para não maçar o leitor suprimi as demonstrações destes teoremas que saem imediatamente das definições da secção anterior.

Todavia, além destas propriedades, o domínio \mathfrak{R} também possui *continuidade*, isto é, o teorema seguinte é verdadeiro:

IV. Se o conjunto \mathfrak{R} de todos os números reais se divide em duas classes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, de tal forma que todo o número a_1 da classe \mathfrak{A}_1 é menor do que todo o número a_2 da classe \mathfrak{A}_2 , então existe um e um só número α pelo qual esta separação é produzida.

Prova. Pela separação ou corte de \mathfrak{R} em \mathfrak{A}_1 e \mathfrak{A}_2 obtemos ao mesmo tempo o corte (A_1, A_2) do conjunto R de todos os números racionais definido da seguinte forma: A_1 contém todos os números racionais da classe \mathfrak{A}_1 , e A_2 contém todos os outros números racionais, isto é, todos os números racionais da classe \mathfrak{A}_2 . Seja α o número perfeitamente bem definido que produz este corte (A_1, A_2) . Se β é um número qualquer diferente de α , então existem infinitos números racionais c que estão situados entre α e β . Se $\beta < \alpha$, então $c < \alpha$; logo c pertence à classe A_1 e conseqüentemente também à classe \mathfrak{A}_1 , e

como também temos $\beta < c$, então β também pertence à mesma classe \mathfrak{A}_1 , porque todo o número em \mathfrak{A}_2 é maior do que todo o número c em \mathfrak{A}_1 . Mas se $\beta > \alpha$, então $c > \alpha$; portanto c pertence à classe A_2 e, conseqüentemente, também pertence à classe \mathfrak{A}_2 , e como ao mesmo tempo $\beta > c$, então β também pertence à mesma classe \mathfrak{A}_2 , porque todo o número em \mathfrak{A}_1 é menor do que todo o número c em \mathfrak{A}_2 . Portanto todo o número β diferente de α pertence à classe \mathfrak{A}_1 ou à classe \mathfrak{A}_2 conforme $\beta < \alpha$ ou $\beta > \alpha$; conseqüentemente o próprio α é ou o maior número em \mathfrak{A}_1 , ou o menor número em \mathfrak{A}_2 , isto é, α é obviamente o único número pelo qual a separação de R nas classes $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ é produzida. Como se queria demonstrar.

§6.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS REAIS

Para reduzir qualquer operação com dois números reais α, β a operações com números racionais, precisamos apenas de fazer o seguinte: dados dois cortes $(A_1, A_2), (B_1, B_2)$ produzidos pelos números α e β no conjunto R , definimos o corte (C_1, C_2) que corresponde ao resultado da operação, γ . Aqui discute-se apenas o caso mais simples, o da adição.

Se c é um número racional qualquer, colocamo-lo na classe C_1 , desde que haja dois números a_1 em A_1 e b_1 em B_1 cuja soma $a_1 + b_1 \geq c$; os outros números racionais deverão ser colocados na classe C_2 . Esta separação de todos os números racionais em duas classes C_1, C_2 forma evidentemente um corte, pois qualquer número c_1 em C_1 é menor do que qualquer número c_2 em C_2 . Se α e β forem racionais então todo o número c_1 em C_1 é $\leq \alpha + \beta$, porque $a_1 \leq \alpha$ e $b_1 \leq \beta$ e, por isso, $a_1 + b_1 \leq \alpha + \beta$; além disso, se estivesse contido em C_2 algum número $c_2 < \alpha + \beta$, donde $\alpha + \beta = c_2 + p$ para algum número racional positivo p , então deveríamos ter

$$c_2 = (\alpha - \frac{1}{2}p) + (\beta - \frac{1}{2}p),$$

o que contradiz a definição do número c_2 , porque $\alpha - \frac{1}{2}p$ é um número em A_1 , e $\beta - \frac{1}{2}p$ um número em B_1 ; conseqüentemente, todo o número c_2 contido em C_2 é $\geq \alpha + \beta$. Portanto, neste caso, o corte (C_1, C_2) é produzido pela soma $\alpha + \beta$. Assim, não violamos a definição que sustenta a aritmética dos números racionais se estipularmos que a soma de $\alpha + \beta$ de qualquer dois números reais α, β é o número γ pelo qual o corte (C_1, C_2) é produzido. E, se apenas um dos números α, β é racional, por exemplo α , é fácil verificar que não faz diferença na soma $\gamma = \alpha + \beta$ que o número α esteja na classe A_1 ou na classe A_2 .

As outras operações, da chamada aritmética elementar (a formação de diferenças, produtos, quocientes, potências, raízes, logaritmos), podem ser definidas tal como a adição, e desta forma chegamos a verdadeiras demonstrações de teoremas (como, por exemplo: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$), que tanto quanto eu saiba nunca antes foram estabelecidas. O tamanho excessivo que se teme nas definições das operações mais complicadas está parcialmente ligado à natureza do assunto, mas em grande parte poderá ser evitado. A noção de *intervalo* é muito útil neste contexto — isto é, um conjunto A de números racionais que possui a propriedade característica seguinte: se a e a' são números de A , então todos os números que estão situados entre a e a' estão em A . O conjunto R de todos os números racionais, e também as duas classes de qualquer corte, são intervalos.

Se existir um número racional a_1 que é menor do que, e um número racional a_2 que é maior do que todos os números do intervalo A , então A chama-se um intervalo finito [limitado]; neste caso existem infinitos números com a mesma propriedade que a_1 e infinitos números com a mesma propriedade que a_2 ; o domínio R pode-se então dividir em três partes A_1, A, A_2 , e entram em cena dois números racionais ou irracionais bem definidos, α_1, α_2 que se podem chamar respectivamente o *limite inferior* e *limite superior* do intervalo A ; o limite inferior α_1 é determinado pelo corte para o qual o conjunto A_1 forma a primeira classe e o limite superior α_2 pelo corte para o qual o conjunto A_2 forma a segunda classe. Para qualquer número racional ou irracional α que esteja entre α_1 e α_2 , pode-se dizer que está *dentro* [é interior ao] do intervalo A . Se todos os números de um intervalo A também são números de um intervalo B então a A chama-se uma parte de B .

Considerações ainda mais longas parecem surgir quando tentamos adaptar os numerosos teoremas da aritmética dos números racionais (por exemplo, o teorema $(a + b)c = ac + bc$) a números reais arbitrários. Todavia, este não é o caso. É fácil ver que tudo se reduz a mostrar que as operações aritméticas possuem uma certa continuidade. O que quero dizer com esta afirmação, pode ser expresso na forma de teorema geral:

“Se o número λ é o resultado de uma operação com os números $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ e λ pertence ao intervalo L , então podem ser tomados intervalos A, B, C, \dots nos quais se encontram os números $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ e tais que o resultado da mesma operação em que os números $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ são substituídos por números arbitrários dos intervalos A, B, C, \dots é sempre um número pertencente ao intervalo L .” A deselegância proibitiva que marca o enunciado deste teorema convence-nos, todavia, que algo tem de ser trazido em auxílio dos meios de expressão; isto pode ser conseguido, de facto, da maneira mais satisfatória através da introdução das ideias de *magnitudes variáveis, funções e valores limites*, e seria melhor basear nestas ideias as definições até das operações aritméticas mais simples, assunto este, todavia, que não poderá ser desenvolvido aqui.

§7.

ANÁLISE INFINITESIMAL

A terminar, devemos explicar a ligação entre as investigações precedentes e alguns teoremas fundamentais da análise infinitesimal.

Dizemos que uma magnitude variável x que passa por sucessivos valores numéricos bem definidos aproxima um valor limite fixo α quando, no decorrer do processo, x acaba por se encontrar entre quaisquer dois números dados entre os quais o próprio α também está ou, o que vem a dar no mesmo, quando a diferença $x - \alpha$ em valor absoluto, se torna menor do que qualquer valor positivo dado.

Um dos mais importantes teoremas pode ser enunciado da seguinte maneira: “Se uma magnitude x cresce continuamente mas não para além de todos os limites, então ela aproxima-se de um valor limite.”

Provo-o da seguinte maneira. Por hipótese existe um número (e, portanto, infinitos outros números) α_2 tal que x se mantém continuamente $< \alpha_2$; designo por \mathfrak{A}_2 o conjunto de todos estes α_2 , por \mathfrak{A}_1 o conjunto de todos os outros números α_1 ; cada um destes últimos possui a propriedade de que no decorrer do processo, x torna-se mais tarde ou mais cedo $\geq \alpha_1$, logo todo o número α_1 é menor do que qualquer número α_2 , e consequentemente existe um número α que ou é o máximo em \mathfrak{A}_1 ou o mínimo em \mathfrak{A}_2

(§5, IV). O primeiro caso não pode acontecer pois x não pára de crescer, logo α é o número mínimo em \mathfrak{A}_2 . Mas para qualquer α_1 , iremos ter mais tarde ou mais cedo $\alpha_1 < x < \alpha$, isto é, x aproxima-se do valor limite α .

Este teorema é equivalente ao princípio da continuidade, isto é, ele perde a sua validade assim que nós assumimos que algum número real não está contido no domínio \mathfrak{R} ou expresso de outra maneira: se este teorema é correcto então o teorema IV no §5 também é correcto.

Outro teorema da análise infinitesimal, também equivalente a este e mais frequentemente utilizado, pode ser enunciado da seguinte maneira: “Se na variação da magnitude x pudermos, para qualquer magnitude positiva δ , fazer corresponder um intervalo dentro do qual x muda por menos de δ , então x aproxima-se de um valor limite.”

Este recíproco do teorema facilmente demonstrado de que qualquer magnitude variável que se aproxima de um valor limite muda finalmente por menos de qualquer magnitude positiva dada, tanto pode ser derivado do teorema precedente como directamente do princípio da continuidade. Escolho a última via. Seja δ uma magnitude positiva qualquer (isto é, $\delta > 0$). Então, por hipótese, um instante⁶ virá a partir do qual x muda por menos de δ , isto é, se neste instante x tiver o valor a , então passado algum tempo devemos ter continuamente $x > a - \delta$ e $x < a + \delta$. Deixo agora de lado, por momentos, a hipótese original e utilizo somente o teorema acabado de provar de que todos os valores posteriores da variável x estão entre dois valores finitos dados. É nisto que baseio uma dupla separação de todos os números reais. A um conjunto \mathfrak{A}_2 atribuo um número α_2 (por exemplo, $a + \delta$) quando, no decurso do processo, x acaba por se tornar $\leq \alpha_2$; no conjunto \mathfrak{A}_1 coloco todos os números que não pertencem a \mathfrak{A}_2 ; se α_1 é um tal número, então, por muito que o processo tenha avançado, ainda teremos infinitas vezes $x > \alpha_2$. Como todo o número α_1 é menor do que qualquer número α_2 , existe um número bem determinado α que produz este corte ($\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$) do conjunto \mathfrak{R} e ao qual eu vou chamar o limite superior da variável x que se manterá sempre finito. Da mesma forma, como resultado do comportamento da variável x , é produzido um segundo corte ($\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$) do conjunto \mathfrak{R} um número β_2 (por exemplo, $\alpha - \delta$) está em \mathfrak{B}_2 quando, no decurso do processo, x acaba por se tornar $\geq \beta_2$ todo o outro número β_2 , a ser colocado em \mathfrak{B}_2 , tem a propriedade de x nunca se tornar $\geq \beta_2$; portanto, x é infinitas vezes $< \beta_2$; ao número β que produz este corte chamo limite inferior da variável x . Os dois números α e β são obviamente caracterizados pela seguinte propriedade: se ϵ é uma magnitude positiva arbitrariamente pequena, então mais tarde ou mais cedo teremos $x < \alpha + \epsilon$ e $x > \beta - \epsilon$, mas nunca acabaremos por ter $x < \alpha - \epsilon$ nem $x > \beta + \epsilon$. Agora temos dois casos possíveis. Se α e β são diferentes um do outro, então temos necessariamente $\alpha > \beta$, porque é sempre $\alpha_2 > \beta_2$ a variável x oscila e, por mais que o processo avance, sofre sempre mudanças cuja quantidade ultrapassa o valor $(\alpha - \beta) - 2\epsilon$, onde ϵ é uma magnitude positiva arbitrariamente pequena. Mas a suposição inicial contradiz esta consequência; então resta apenas o segundo caso $\alpha = \beta$ e como já foi mostrado que por muito pequena que seja a magnitude positiva ϵ , teremos sempre mais tarde ou mais cedo $x < \alpha + \epsilon$ e $x > \beta - \epsilon$, resulta que x aproxima-se do valor limite α como se queria demonstrar.

Estes exemplos serão suficientes para exhibir a ligação entre o princípio da continuidade e a análise infinitesimal.

⁶[A terminologia do Autor é sugestiva de uma função real continua $x = x(t)$ da variável real t (tempo).]

BIBLIOGRAFIA DO EDITOR

- [1] CANTOR, G. *Foundations of a General Theory of Manifolds: a Mathematical-Philosophical Investigation into the Theory of The Infinite* (1883). Em [7], pp. 878-920.
- [2] CARAÇA, B.J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. 2.^a edição revista por Paulo Almeida, Gradiva, 1999.
- [3] DEDEKIND, R. *Essays on the Theory of Numbers (I. Continuity and Irrational Numbers; II. The Nature and Meaning of Numbers)* (Open Court, tradução de W.W. Beman, 1901). Dover, 1963.
- [4] DUGAC, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Vrin, Paris, 1976.
- [5] EBBINGHAUS, H.-D. *Numbers*. Springer-Verlag, 1991.
- [6] EHRLICH, P. *Real Numbers, Generalizations of the Reals, and Theories of Continua*. Kluwer Academic Publ., 1994.
- [7] EWALD, W. (Editor). *From Kant to Hilbert: A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Vol. II. Oxford Clarendon Press, 1996.
- [8] FERREIRÓS, J. *Labyrinth of Thought, A History of Set Theory and its Role in Modern Mathematics*. Birkhäuser, 1999.
- [9] GLEASON, A.M. *Fundamentals of Abstract Analysis*. Jones and Bartlett, 1991.
- [10] GRATTAN-GUINNESS, I. *From the Calculus to Set Theory (1630-1910)*, G. Duckworth, 1980, reimp. Princeton U.P., 2000.
- [11] FEFERMAN, S., *The Number Systems. Foundations of Algebra and Analysis*. Second edition, Chelsea, 1989.
- [12] HILBERT, D. *Fundamentos da Geometria*. Com Apêndices I-X do Autor e Suplementos de P. Bernays, F. Enriques e H. Poincaré, 2.^a edição portuguesa traduzida por Maria Pilar Ribeiro (colab. de J. da Silva Paulo), Paulino Lima Fortes e A.J. Franco de Oliveira (colab. de A. Vaz Ferreira). Revisão científica e coordenação por A.J. Franco de Oliveira. Gradiva, 2003.
- [13] KATZ, V.J. *A History of Mathematics, An Introduction*. Segunda edição, Addison-Wesley, 1998.
- [14] MENDELSON, E., *Number Systems and the Foundations of Analysis*, Academic Press, 1973.
- [15] OLIVEIRA, A.J.F., I. Van DEN BERG. *Matemática Não-Standard, Uma Introdução com Aplicações*. Fundação Calouste Gulbenkian, 2008.
- [16] OLIVEIRA, A. J. F., C.A. Di PRISCO. *Teoria dos conjuntos* (a publicar).
- [17] Van HEIJENOORT, J. *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Harvard U.P., 1967.
- [18] TRUSS, J.K. *Foundations of Mathematical Analysis*. Clarendon Press, Oxford 1997.

ajfrancoli@gmail.com